A.1 向量微积分

以下三个微分算子是向量微积分的基础：梯度(gradient)，散度(divergence)和旋度(curl).有时它们在等式中表示为grad，div和curl.

A.1.1 梯度

梯度仅获取函数的所有空间偏导数，并返回向量. 在二维空间中,



在三维空间中,



有时将梯度算子视为符号向量可能会有所帮助，例如在三维空间中：



梯度经常用来近似局部函数：



在相关方面，我们可以评估函数的方向导数.也就是说，当沿着特定向量方向看时，使用梯度可以确定函数变化的速度.例如，如果方向是,

.

有时，我们会采用向量值函数的梯度，从而得到一个矩阵（雅可比矩阵）.例如，在三维空间中





矩阵向量乘积仅是计算矩阵的每一行与向量的点积，因此每一行应为函数的梯度：



另一种表示梯度的方法是



在偏导数的分母中使用向量表示我们正在对的每个分量取导数.

A.1.2. 散度

散度运算符仅应用于矢量场，并测量矢量在任意点处收敛或发散了多少.在二维中



在三维空间中,



请注意，输入是向量，输出是标量.

通过将符号解释为以符号形式表示梯度操作符和向量场之间的点积，例如在三维中进行解释为



A.1.3 旋度

旋度运算符测量向量场围绕任何固定点旋转了多少.在三维空间上，这是一个向量：



我们有两种方式将此公式缩减为二维.二维向量场的旋度结果是标量，上面表达式的第三个分量如同我们使用三维向量场



二维标量场的旋度是一个向量，如果我们使用三维向量场:



记住这些公式的简单方法是，旋度在梯度操作符和函数之间取叉乘。 例如，在三维空间中:



旋度是一种测量向量场在本地旋转的速度（以及在三维空间中绕哪个轴）的一种方法。想象一下你在水流中放一个小桨轮并使其旋转，那么旋度是小浆轮角速度的两倍。你可以采用代表刚体旋转的速度场的旋度来验证这一点。

旋度为零的矢量场称为零旋度，或者出于明显的原因是无旋的。

A.1.4 拉普拉斯

拉普拉斯算子通常由梯度的发散形成（因为它在流体动力学中反复出现）。有时它也被写为或，但由于这些符号经常用于其它目的，所以我们这里使用表示.在二维空间中,



并且在三维空间中,



拉普拉斯算子还可以应用于矢量场甚至矩阵场，其结果就是每个分量的拉普拉斯算子。

顺便说一下，微分方程被称为拉普拉斯方程,如果右侧被非0值替换，即被称为泊松方程.

A.1.5 微分等式

基于以下事实，有一些等式更改混合偏导数的顺序不会更改结果（假设合理的平滑度），例如，



有了这个，对任意平滑函数很容易证明，



涡度计算中另一个等式是



亥姆霍兹分解或霍奇分解是任何光滑向量场u均可写为无散度部分和无旋度部分之和的结果。 实际上，回头看上面的前两个等式，无散度部分可以写为某些东西的旋度，而无旋度部分可以写为某些东西的梯度。 在三三维空间中，



其中向量势函数值，是标量势函数.在二维空间中这些退化为标量势函数：



这种分解与不可压缩的流体流动高度相关，因为我们可以将压强投影步骤解释为将中间速度场分解为无散度部分和其它被丢弃的部分，只保留无散度的部分。当我们将无散度速度场表示为势ψ的旋度时，我们称ψ为流函数(streamfunction).

一些有用的等式



A.1.6 积分等式

A.1.7 基础张量符号

A.2 数值方法

本书重点介绍基于有限差分的方法，这些方法本身可以简单地归结为泰勒级数的应用。

假设函数至少有k阶平滑导数,则

剩余项可以用多个方式表达，例如



 其中



注意，可能为负，在这种情况下，剩余项的区间为.我们通常会使用简单的形式，但要记住，隐藏常数与的k阶导数有关-如果不是特别平滑，则剩余项有可能很大，此时泰勒级数失效.

A.2.1 空间上的有限差分

可以使用泰勒定理来估计在网格上采样的平滑函数的偏导数.例如，对于在间隔的网格上采样的函数，即，泰勒定理给出



重新整理该等式可以估算出在处的值：



注意经过除以之后，误差项被降低为一阶导数，即中的的指数为1.

当然，你也可以从估算相同的导数，对使用泰勒定理：



这也是一阶精确。 由于使用了仅在逼近点一侧的q值，因此和先前的有限差分都是单侧的。

对于中心或中心有限差分，我们可以同时使用和获得二阶精度：我们近似的值位于所用点的中心.这两点的泰勒级数：



两个公式相减，消去相同项，



除以，得到二阶精确中心有限差分：



二阶精确中心有限差分同样适用于点:



在本书中我们同样要处理在中间点采样的函数,,我们得到相似的公式



高阶导数也可以被估算. 特别地，对于二阶导数我们可以获得二阶精确中心有限差分，泰勒级数为：



以下组合消去了大多数项：



除以，得到有限差分公式，



A.2.2 时间积分

在时间上求解微分方程通常围绕相同的有限差分方法。 例如，以初始条件求解微分方程



我们可以在离散时间出近似，其中.时间步是这些离散时间之间的时长:.该时间步长在这些离散时间之间可能并不相同.时间积分的过程是按顺序地确定近似值.由于我们在近似地求解



所以被称为积分.

最简单的时间积分方法是前向欧拉法(forward Euler)，基于一阶单侧有限差分公式：



带入微分方程并重新整理项，根据前一个计算：



这仅仅是一阶精确.

本书利用了一些更高级的时间积分方案，例如Runge-Kutta方法。 Runge-Kutta系列通过在一个时间步中的多个点上评估f获得了更高阶的精度和其他数值优势。 例如，经典的二阶精确Runge-Kutta方法之一可以写成



最好的三阶精确Runge-Kutta公式由Ralston [Ral62]给出:



许多时间积分方案都带有警告，除非将Δt选得足够小，否则尽管精确解仍然有界，但计算出的解却呈指数级爆炸。 这被称为稳定时间步长限制。 对于某些问题，无论∆t多么小，时间积分方案都可能甚至不稳定：在某些情况下，上述正向Euler方案和上述二阶精确Runge-Kutta方案都存在此缺陷。 结果，三阶精确的Runge-Kutta方案可以被认为是最简单的通用方法。